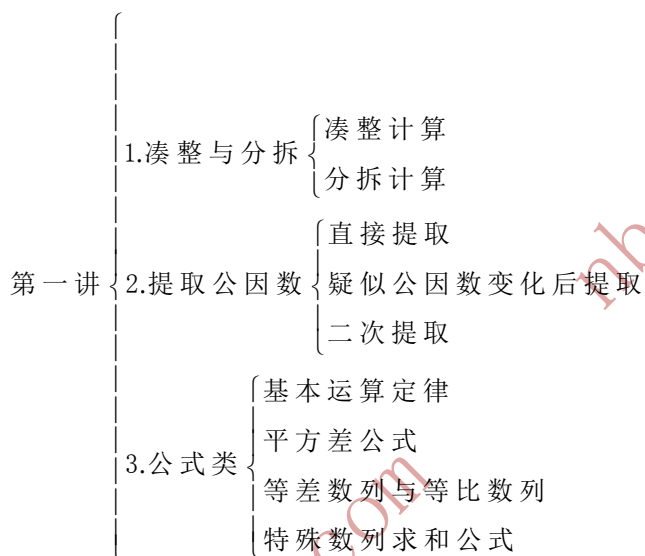


宁波小学高年级奥数系统总复习 第一章 计算篇

第一讲：速算与巧算（一）

闯关目标



赛区热身

1. 整除与分拆

凑整：利用运算律（如交换律、结合律、分配律）将一些数凑成整一、整十或整百再计算。凑整运算技巧无论是在整数计算还是分数、小数计算中，都有广泛的应用。凑整主要有以下几种：I.分组凑整法；II.加补凑整法；III.基准数凑整法。

分拆：这里所说的分拆是指在计算过程中以巧算为目的的分拆。为了使计算简便，我们常常把一个整数写成两个或多个数的和差积的形式，这种方法叫做分

拆。

2.提取公因数法

提取公因数：这个方法等同于课内所学的乘法分配律的逆运算。一般情况下，用提取公因数法解决的题目有两个特征。

一是要有“公因数”，如果是“疑似”公因数（例如 38 和 3.8 或 38 和 19）我们可以借助下面几个方法对它加工。

$$\textcircled{1} a \times b = (a \times 10) \times (b \div 10) \quad \textcircled{2} \frac{a}{b} \times c = \frac{c}{b} \times a \quad \textcircled{3} a \times b \times c = a \times (b \times c)$$

二是要有互补数。

3.公式型计算

(1)基本公式

$$\textcircled{1} \text{加法交换律: } a + b = b + a$$

$$\textcircled{2} \text{加法结合律: } a + b + c = a + (b + c)$$

$$\textcircled{3} \text{减法的性质: } a - b - c = a - (b + c)$$

$$\textcircled{4} \text{乘法交换律: } a \times b = b \times a$$

$$\textcircled{5} \text{乘法结合律: } a \times b \times c = a \times (b \times c)$$

$$\textcircled{6} \text{乘法分配律: } a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

$$\textcircled{7} \text{除法的性质: } a \div b \div c = a \div (b \times c)$$

(2)平方类公式

$$\textcircled{1} \text{完全平方公式: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

②平方差公式: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(3)等差数列、等比数列公式

①等差数列: 在等差数列中, 一般 a_1 代表首项, a_n 代表末项, d 代表公差, n 代表项数, S 代表和。

A)通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$

B)求项数公式: $n = \frac{(a_n - a_1)}{d} + 1$

C)求公差公式: $d = \frac{(a_n - a_1)}{n-1}$

D)求和公式: $S = \frac{(a_n + a_1) \times n}{2}$

注: 此公式针对递增的等差数列, 如遇到递减数列的等差数列例如: 100, 97, 94, 91, ..., 1, 只需要把它倒过来看即可。

求和公式的理解与推导

a) 高斯配对法

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \underbrace{(1+100) + (2+99) + (3+98) + \dots + (50+51)}_{\text{共 50 组}} = 101 \times 50 = 5050$$

b) 倒序相加法

$$\begin{aligned} \text{和} &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ \text{+ 和} &= 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2 \text{倍和} &= 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \\ \text{即, 和} &= (100+1) \times 100 \div 2 = 101 \times 50 = 5050 \end{aligned}$$

推广后, 对于其他等差数列, 都有这么一条公式:

和 = (首项 + 末项) $\times$ 项数 $\div 2$

②等比数列: 一般情况下, 在等比数列中, a_1 代表首项, a_n 代表末项, q 代

nb. aoshu. com

表公比， n 代表项数， S 代表和。

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} (q \neq 1)$$

等比数列求和的理解和推导

a) 有借有还法

例如：求 $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256$ 的和？

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 - 1 \\ &= 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 - 1 \\ &= 4 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 - 1 \\ &= \cdots \\ &= 256 \times 2 - 1 \\ &= 511 \end{aligned}$$

对于公比是 $\frac{1}{2}$ 的等比数列也是适用的，因为我们在理解时可以把数列倒过来，并不影响最后的求和。

b) 错位相减法

例如：求 $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$ 的和？

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 \cdots \cdots \textcircled{1}, \textcircled{1} \times 3 \text{ 得}$$

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 得： $2S = 6561 - 1$ ，则 $S = \frac{6561 - 1}{2} = 3280$ 。上述过程是先把原数列按照数列的倍数关系扩倍，然后两式相减，最后求出数列的和。此方法适用于所有的等比数列，可推导出求和公式，建议直接用这种方式求和，不需要死记求和公式。

(4) 特殊数列求和公式

$$\textcircled{1} \text{ 山顶和公式: } 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

②奇数和公式: $1+3+5+\cdots+(2n+1)=n^2$

③偶数和公式: $2+4+6+8+\cdots+2n=n^2+n$

④求和公式: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n \times (n+1)}{2}$

⑤平方和公式: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$

⑥立方和公式: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$

(5)几个特殊数的运算技巧。

① $11^2=121$

$11^2=121$

...

$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}^2=12345\cdots n\cdots 54321$

② $\overline{ab} \times 101 = \overline{abab}$

$\overline{ab} \times 10101 = \overline{ababab}$

这一类的数不妨称之为“重码数”，根据位值原理，我们可以得到以下结论：I.重复循环的次数与1的个数相等，II.两个1之间所夹的0的个数比循环的位数少1.

③无“8”数: $12345679 \times 9 = 111111111$; $12345679 \times 18 = 222222222$;

$12345679 \times 27 = 333333333$; $\cdots 12345679 \times 81 = 999999999$

实战演练

例题 1: $9\frac{4}{5} + 99\frac{4}{5} + 999\frac{4}{5} + 9999\frac{4}{5} + 99999\frac{4}{5}$

点拨: 这些数的特点是都是接近整十整百整千的数，所以是可以凑整的。

$$9\frac{4}{5} = 10 - \frac{1}{5}; \quad 99\frac{4}{5} = 100 - \frac{1}{5}; \dots$$

分析: 原式 = $\left(10 - \frac{1}{5}\right) + \left(100 - \frac{1}{5}\right) + \left(1000 - \frac{1}{5}\right) + \left(10000 - \frac{1}{5}\right) + \left(100000 - \frac{1}{5}\right)$

$$= 111110 - \frac{1}{5} \times 5$$

$$= 111109$$

总结: 看到接近整一、整十、整百的数，想到把他们进行凑整运算。

例题 2: $97\frac{1}{50} \times \frac{1}{49} + 77\frac{1}{40} \times \frac{1}{39} + 57\frac{1}{30} \times \frac{1}{29}$

点拨: 仔细观察一下这些数，是不是存在什么规律呢？其实 $97\frac{1}{50} \times \frac{1}{49}$ 可以

这样计算： $97\frac{1}{50} \times \frac{1}{49} = \left(98 - \frac{49}{50}\right) \times \frac{1}{49} = 98 \times \frac{1}{49} - \frac{49}{50} \times \frac{1}{49} = 2 - \frac{1}{50}$ 。往下你会算了吗？

分析: 原式 = $\left(98 - \frac{49}{50}\right) \times \frac{1}{49} + \left(78 - \frac{39}{40}\right) \times \frac{1}{39} + \left(58 - \frac{29}{30}\right) \times \frac{1}{29}$

$$= 2 \times 3 - \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right)$$

$$= 6 - \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 6 - \frac{1}{10} \times \frac{47}{60} = 5\frac{53}{600}$$

总结: 本题针对带分数运用了特殊的技巧——拆分，在带分数的某些运算中把带分数表示成一个整数和一个分数相加或者相减的形式，方便简算。

例题 3: $7.816 \times 1.45 + 3.14 \times 2.184 + 1.69 \times 7.186 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

点拨: 观察整个算式的过程中, 你有没有发现局部的公因数呢? 将局部进行提取公因数计算, 看看会发生什么事情?

分析: 原式 $= 7.816 \times (1.45 + 1.69) + 3.14 \times 2.184$

$$= 7.816 \times 3.14 + 3.14 \times 2.184 \text{ (这里是不是可以再次提取公因数了呢?)}$$

$$= 3.14 \times (7.816 + 2.184)$$

$$= 3.14 \times 10 = 31.4$$

总结: 在加减乘除混合运算中, 先观察有无公因数。如果没有, 则观察有无局部的公因数, 有局部公因数的题目往往可以进行二次提取。

例题 4: $36.1 \times 6.8 + 486 \times 0.32$

点拨: 本题直接计算不是好的方法。经验告诉我们, 这道题一定可以提取公因数。可是公因数在哪里呢? 这就需要我们进行够造! 本题中 6.8 和 0.32 是不是可以变成“补数”呢?

分析: 原式 $= 36.1 \times 6.8 + (36.1 + 12.5) \times 3.2$

$$= 36.1 \times (6.8 + 3.2) + 12.5 \times 3.2$$

$$= 361 + 12.5 \times 8 \times 0.4$$

$$= 361 + 40 = 401$$

总结: 当题目中出现“补数”或某些数可化为“补数”时, 要注意去凑公因数。

例题 5: $667 \times 668 \times 669 - 666 \times 668 \times 670 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

点拨: 看完题目后, 找到公因数了吗? 先把他们提取出来把。

之后 667×669 可以这样计算: $667 \times 669 = (668 - 1) \times (668 + 1) = 668^2 - 1^2$

666×670 可以这样计算: $666 \times 670 = (668 - 2) \times (668 + 2) = 668^2 - 2^2$

分析: 方法一: 原式 $= 668 \times (667 \times 669 - 666 \times 670)$

$$\begin{aligned} &= 668 \times [(668^2 - 1^2) - (668^2 - 2^2)] \\ &= 668 \times (4 - 1) \\ &= 2004 \end{aligned}$$

方法二: 原式 $= 667 \times 668 \times (670 - 1) - 666 \times 668 \times 670$

$$\begin{aligned} &= 667 \times 668 \times 670 - 666 \times 668 \times 670 - 667 \times 668 \\ &= 668 \times 670 \times (667 - 666) - 667 \times 668 \\ &= 668 \times (670 - 667) \\ &= 2004 \end{aligned}$$

总结: 本题方法一主要是对平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 的灵活运用;
方法二要学会灵活拆数。

例题 6:
$$\frac{2010 + 20102010 + 201020102010 + 2010201020102010}{2011 + 20112011 + 201120112011 + 2011201120112011}$$

点拨: 我们发现分子和分母中出现的都是重码数。

其中 $20102010 = 2010 \times 10001$; $201020102010 = 2010 \times 100010001$; ... 最后发现分子跟分母上的数都是一样的结构。

分析: 原式 $= \frac{2010 + 2010 \times 10001 + 2010 \times 100010001 + 2010 \times 1000100010001}{2011 + 2011 \times 10001 + 2011 \times 100010001 + 2011 \times 1000100010001}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2010(1 + 10001 + 100010001 + 1000100010001)}{2011(1 + 10001 + 100010001 + 1000100010001)} \\ &= \frac{2010}{2011} \end{aligned}$$

总结: 做有关重码数的计算时, 首先要利用位值原理将其拆分成重码的数乘以一个数的形式, 然后再进行计算。

例题 7: $1! \times 3 - 2! \times 4 + 3! \times 5 - 4! \times 6 + \cdots - 2010! \times 2012 + 2011! = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

点拨: $n!$ 表示从 n 乘到 1, 如 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$,

$$100! = 100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 1$$

那么, 则有 $(n+1)! = (n+1)n!$ 。这道题肯定可以转化成能抵消的题目, 来观察下面的规律:

$$1! \times 3 = 1! \times (1+2) = 1! + 2!; \quad 2! \times 4 = 2! \times (1+3) = 2! + 3!; \quad 3! \times 5 = 3! \times (1+4) = 3! + 4!$$

分析: 原式 $= 1! + 2! - 2! - 3! + 3! + 4! - 4! - 5! + \cdots + 2009! + 2010! - 2010! - 2011! + 2011!$

$$= 1$$

总结: 本题用数的拆分 $n! \times (n+2) = n! + (n+1)!$, 很多题目都会结合凑整与拆分这两种基本技巧。

例题 8: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187}$

点拨: 经过观察, 相邻两数之间是 3 被的关系, 这是一个等比数列求和的题。

分析: 令 $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187}$

乘以 3 后 $3S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$

两式相减得: $2S = 3 - \frac{1}{2187} = 2\frac{2186}{2187}$,

那么, $S = 2\frac{2186}{2187} \div 2 = 1\frac{1093}{2187}$

总结: 一般的等比数列求和都可以使用错位相减法。

例题 9: $1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + \cdots + 18 \times 19^2 + 19 \times 20^2$

点拨: 可以想到拆分数的思想。

$$1 \times 2^2 = (2-1) \times 2^2 = 2^3 - 2^2; \quad 2 \times 3^2 = (3-1) \times 3^2 = 3^3 - 3^2; \cdots$$

分析:

$$\text{原式} = (2-1) \times 2^2 + (3-1) \times 3^2 + (4-1) \times 4^2 + \cdots + (19-1) \times 19^2 + (20-1) \times 20^2$$

$$= (2^3 - 2^2) + (3^3 - 3^2) + (4^3 - 4^2) + \cdots + (19^3 - 19^2) + (20^3 - 20^2)$$

$$= (1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + 20^3) - (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 20^2)$$

(注意这时给两个算式都加上1)

$$= \frac{20^2 \times 21^2}{4} - \frac{20 \times 21 \times 41}{6}$$

$$= 41230$$

总结: 数的拆分很常用, 通过拆分把不熟悉的题目边长熟悉。

nb. aoshu. com

nb. aoshu. com